Le calcul d'ïncertitudes

(document 2)

C.A.S.

Supposons une mesure x = 25,1 ± 0,5 cm. La valeur centrale de la mesure est x = 25,1 cm et **l'incertitude absolue** de cette mesure est désignée par Δ x = 0,5 cm. **L'incertitude relative** de la mesure est le rapport de l'incertitude absolue sur la valeur centrale et s'exprime donc par Δ x/x. Dans notre exemple Δ x/x = 0,5/25,1 = 0,02 . L'incertitude relative est donc 0,02 ou 2%. Ceci signifie que la mesure est précise à 2% prè . On peut écrire aussi bien (25,1 ± 0,5) cm que (25,1 cm ± 2%).

<u>Arrondir le résultat d'un calcul</u>

L'incertitude absolue d'un résultat doit être arrondie à un seul chiffre significatif. Après quoi la mesure elle-même doit être arrondie en fonction de la position décimale de l'incertitude.

Exemples: 125,66 ± 0,878 ——> 125,7 ± 0,9

0,05295 ± 0,002369 ——> 0,053 ± 0,002

<u>Incertitude d'une somme ou d'une différence</u>

L'incertitude absolue d'une somme ou d'une différence est égale à la somme des incertitudes absolues

$$\mathbf{z = x + y \quad \Rightarrow \quad \Delta z = \Delta x + \Delta y}$$

Exemple: Supposons que vous mesuriez les deux longueurs suivantes et que vous désiriez savoir quelle longueur elles font bout à bout:

12,359 ± 0,008 m
<u>1,77 ± 0,01 m</u>
14,129 ± 0,018 m ——> 14,13 ± 0,02 m

<u>Incertitude d'un produit ou d'un quotient</u>

L'incertitude relative d'un produit ou d'un quotient est égale à la somme des incertitudes relatives des mesures.

$$\mathbf{z = x\,y \quad \Rightarrow \quad \Delta z/z = \Delta x/x + \Delta y/y}$$

Exemple: Supposons que les deux derniers segments de l'exemple précédents soient les côtés d'un jardin dont on veut connaître l'aire.

A = (4,356 ± 0,003 m) * (1,77 ± 0,01 m)
A = (4,356 m ± 0,069%) * (1,77 m ± 0,56%)
A = (7,710 12 m^2 ± 0,063%)
A = (7,710 12 ± 0,048) m^2
A = (7,71 ± 0,05) m^2

Incertitude d'une fonction d'une variable

Dans les cas où nous avons une quantité z qui est fonction d'une mesure x; $z = F(x)$. L'incertitude absolue de z est obtenue à partir de la formule de la différentielle. Elle est égale à la dérivée de la fonction multipliée par l'incertitude absolue de la mesure.

$\mathbf{z = F(x)}$ **=>** $\Delta \mathbf{z = F'(x)}\, \Delta \mathbf{x}$ où $F'(x)$ est la dérivée par rapport à x.

Exemple: Supposons que $z = \ln(x)$ et que x soit mesuré comme $89{,}3 \pm 0{,}4$. Que vaut α ? D'une part, on sait que

$z = \ln(89{,}3)$

$z = 4{,}492001$ ... mais où arrondir?

On a $z' = 1/x$; alors $\Delta z = (1/x)\, \Delta x$

$\Delta z = (1/89{,}3)\,(0{,}4)$

$= 0{,}00448$

Donc $z = 4{,}492\,001 \pm 0{,}004$

$z = 4{,}492 \pm 0{,}004$

Méthode par tâtonnement

On peut se servir de la méthodes des extrêmes pour évaluer les valeurs minimales et maximales que peut prendre une fonction, et ainsi trouver son incertitude par tâtonnement. Attention, il faut être certain d'utiliser les bons extrémums. Ainsi, pour maximiser une fraction, il faut minimiser le dénominateur.

$z_{min} = F(x_{min} \text{ ou } x_{max})$ $\quad z = F(x)$ $\quad \Delta z \approx z - z_{min}$

Reprenons l'exemple précédent: $z_{min} = \ln(88{,}9) = 4{,}48751$ et $z = \ln(89{,}3) = 4{,}492001$ donc $\Delta z \approx z - z_{min} \approx 0{,}004$ et le résultat correctement arrondi est: $z = 4{,}492 \pm 0{,}004$.

On voit que cette méthode donne le même résultat que celle utilisant le calcul différentiel.

Exercices résolus

Calculez la valeur centrale demandée, déterminez ses incertitudes absolue et relative, et exprimez correctement la valeur en arrondissant là où il faut.

$x = 23{,}5 \pm 0{,}5$ $\quad y = 6{,}8 \pm 0{,}1$ $\quad z = 0{,}052 \pm 0{,}003$

1. $A = x + y$ 6. $F = x^2z - 3y$
2. $B = yz$ 7. $G = 4\pi x^3 / 3$
3. $C = y - xz$ 8. $H = (x)^{-1/2}$
4. $D = xy/z$ 9. $J = \tan(10 * z_{rad})$
5. $E = \ln (x/z)$ 10. $K = \sqrt{z}$

Réponses:

A = 30,3 ± 0,6

B = 0,35 ± 0,03

C = 5,6 ± 0,2

D = 3100 ± 300 ou mieux: (3,1 ± 0,3) x 10^3

E = 6,11 ± 0,08

F = 8 ± 3

G = 54 000 ± 3000 ou (5,4 ± 0,3) x 10^4

H = 0,206 ± 0,002

J = 0,57 ± 0,04

K = 0,228 ± 0,007