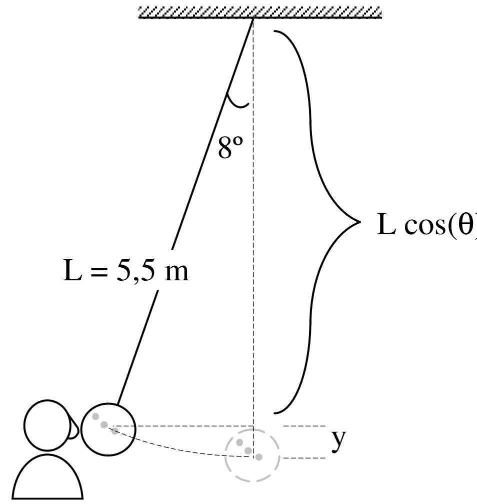
Solutionnaire du devoir 5

1 a) Pour commencer, nous aurons besoin de connaître la hauteur à laquelle le pendule se trouve par rapport au point le plus bas de sa trajectoire. Sur l'image, on voit clairement la hauteur « y » qui est la différence entre la pleine longueur du pendule (L) et le côté adjacent d'un triangle rectangle dont l'angle au sommet est θ = 8º. La hauteur y est donc donnée par



$$y = L - L * \cos(\theta)$$

En remplaçant les variables par les valeurs données, on trouve

$$y = 5{,}35 \text{ cm} = 0{,}0535 \text{ m}$$

b) On trouve alors l'énergie potentielle gravitationnelle en posant :

$$U_g = m\,g\,y = (3 \text{ kg}) * (9{,}8 \text{ N/kg}) * (0{,}0535 \text{ m}) = \boxed{1{,}57 \text{ J}}$$

c) Lorsqu'elle passe au point le plus bas (la verticale du point de support), la boule a perdu toute son énergie potentielle et n'a plus que de l'énergie cinétique. Tout ceci est vrai dans un système de référence où l'on décide que l'énergie potentielle aura la valeur zéro au point le plus bas. Par contre, lorsqu'elle était près du nez de Monsieur Bean, elle ne possédait pas d'énergie cinétique puisqu'avant de la « lâcher », il la « tenait ».

$$0 = W_{nc} = E_f - E_i = (K_f + \cancel{U_f}) - (\cancel{Ki} + U_i) = K_f - U_i$$

$$K_f = U_i = 1{,}57 \text{ J}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\,E}{m}} = \sqrt{\frac{2 * 1{,}57}{3}} = \boxed{1{,}02\ m/s}$$

d) Lorsque la boule fait un angle de 4º avec la verticale, il lui reste un mélange d'énergie cinétique et d'énergie potentielle. Étant donné que nous avons trouvé une façon de calculer l'énergie potentielle par rapport au point le plus bas (voir plus haut), nous gardons la même énergie mécanique de 1,57 J mais la proportion K U a changé :

$$E = K + U = K + m\,g\,L\,(1 - \cos(\theta))$$

$$1{,}57 \text{ J} = K + (3 \text{ kg}) * (9{,}8 \text{ m/s}^2) * (5{,}5 \text{ m}) * (1 - \cos(4º))$$

$$K = ½\, m\, v^2 = 1{,}18 \text{ J} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 0{,}887\ m/s}$$

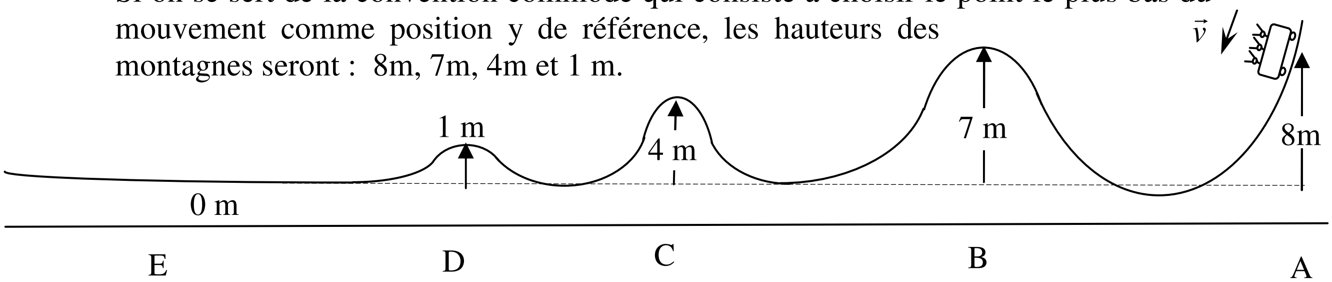
(bonus) e) Pour s'avancer de 12 cm, il faudrait qu'il passe à un angle θ tel que :

$$12 \text{ cm} = 5{,}5 * \sin(8°) - 5{,}5 * \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = 6{,}74°$$

Servons-nous de Excel pour calculer la diminution d'angle à chaque cycle si la boule perd 5% de son énergie à chaque fois. Pour cela, on commence à 1,57 J et on calcule à chaque cycle, 95% de l'énergie du cycle précédent (on multiplie simplement par 0,95). Ce 95% détermine U_{max} de chaque cycle, donc y_{max} et θ_{max} de chaque cycle. (Pour trouver θ on se sert de $U = m\, g\, L\, (1 - \cos(\theta))$. Ensuite, on calcule x_{max} et le dégagement avec la fonction $\sin(\theta)$. On voit que cette situation est atteinte au bout de 7 cycles. Il pourra avancer de 12 cm et la boule le frôlera de 5 mm

après N cycles	U (J)	y (m)	θ (º)	x_{max} (m)	dégagement (cm)
0	1,57	0,0534	7,99	0,765	0,00
1	1,49	0,0507	7,79	0,745	1,93
2	1,42	0,0482	7,59	0,727	3,81
3	1,35	0,0458	7,40	0,708	5,64
4	1,28	0,0435	7,21	0,690	7,42
5	1,21	0,0413	7,03	0,673	9,16
6	1,15	0,0393	6,85	0,656	10,9
7	1,10	0,0373	6,68	0,639	12,5

2. La vitesse initiale doit être traduite en m/s avant d'être remplacée dans les équations. Si on se sert de la convention commode qui consiste à choisir le point le plus bas du mouvement comme position y de référence, les hauteurs des montagnes seront : 8m, 7m, 4m et 1 m.



a) L'énergie mécanique au point initial (en kilojoules) est

$$E = ½\, m\, v^2 + m\, g\, h = 9{,}65 \text{ kJ} + 31{,}4 \text{ kJ} = \boxed{41{,}0 \text{ kJ}}$$

b) La vitesse du wagon aux points B, C et D se déduit de l'énergie cinétique que l'on trouve en soustrayant à chaque fois U de E. Remarquez comment l'énergie totale est toujours la même, quelle que soit la proportion de K et U.

point	E	y	U	K	v
	(kJ)	(m)	(kJ)	(kJ)	(m/s)
A	41,0	8,00	31,4	9,64	6,94
B	41,0	7,00	27,4	13,6	8,23
C	41,0	4,00	15,7	25,3	11,3
D	41,0	1,00	3,92	37,1	13,6

À noter que l'on aurait pu trouver la vitesse sans connaître la masse du wagon, mais pas son énergie

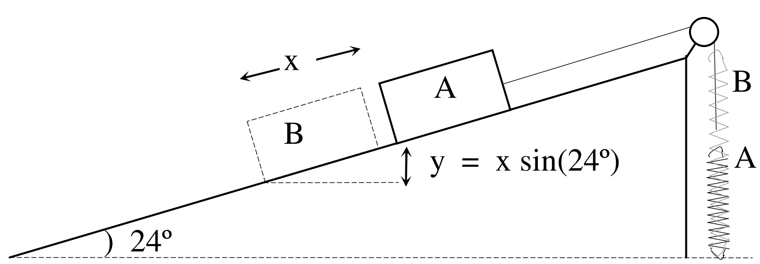
c) Une fois au point E, le freinage est un travail effectué par un frein (le frottement est une force non-conservative). Si on repart de l'équation 8.16c), on trouvera un travail de -41,0 kJ car toute l'énergie passe en frottement.

$$W_{nc} = \Delta E = 0 - 41{,}0 \ kJ$$

Il nous est alors facile de calculer le module de la force moyenne (on calcule la force en négligeant ses variations; donc on la considère constante) à l'aide du concept de travail effectué par la force.

$$W_{nc} = -41{,}0 \ kJ = \vec{F} \cdot \vec{s} = F * 10\,m * \cos(180°) \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 4{,}10 \ kN}$$

3. Dans cet exercice, il y a du frottement, il faut donc appliquer l'équation 8.16c car l'énergie n'est pas conservée. Dessinons clairement la situation initiale (A) et finale (B) sur un schéma. Nous verrons que le bloc a perdu de l'énergie potentielle gravitationnelle entre A et B puisqu'il est descendu, tandis que le ressort a emmagasiné de l'énergie potentielle élastique puisqu'il s'est étiré.



(*) $$W_{nc} = \Delta E = E_f - E_i = (\cancel{K_f} + U_f) - (\cancel{K_i} + U_i)$$

Dans le but de poser W_{nc}, trouvons d'abord f_c à l'aide de l'équilibre des forces en y:

$$\sum F_y = 0 = \mathcal{N} - m\,g\cos(24°) \quad \Rightarrow \quad f_c = \mu_c\ \mathcal{N} = \mu_c\ m\,g\cos(24°) = 26{,}9\,N$$

À la fin, il ne restera plus d'énergie potentielle gravitationnelle car ce sera le point le plus bas du mouvement. Mais au début, au point A, nous aurons

$$m\ g\ y = (10\ kg) * (9{,}8\ m/s^2) * x \sin(24^o) = 39{,}9\ x$$

Pour ce qui est du gain d'énergie potentielle élastique dans le ressort, nous avons:

$$U_r = ½\ k\ x^2 = 45\ x^2$$

L'équation complète se lit donc:

$$-26{,}9\ x = 45\ x^2 - 39{,}9\ x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0{,}289\, m}$$

b) En revenant à l'équation (*), on peut remplacer x par 0,1 m et ne pas biffer l'énergie cinétique finale (car cette fois, il y en a).

(**)

$$W_{nc} = \Delta E = E_f - E_i = (K_f + U_f) - (\cancel{K_i} + U_i)$$

$$-26{,}9\ (0{,}1\ ) = K_f + ½\ 90\ (0{,}1)^2 - 39{,}9\ (0{,}1)$$

$$K_f = ½\ m\ v^2 = 0{,}85\ J$$

$$\boxed{v = 0{,}412\ m/s}$$