

Centre d'aide en sciences

Document 2: Le calcul des incertitudes

Incertitude *absolue* et incertitude *relative*

Supposons une mesure de longueur $x = 25,1 \pm 0,5$ cm. La valeur centrale de la mesure est $x = 25,1$ cm et *l'incertitude absolue* de cette mesure est désignée par $\Delta x = 0,5$ cm. *L'incertitude relative* de la mesure est le rapport de l'incertitude absolue sur la valeur centrale et s'exprime donc par $\frac{\Delta x}{x}$. Dans notre exemple $\frac{\Delta x}{x} = 0,5 \div 25,1 = 0,02$. L'incertitude relative est donc 0,02 ou 2%. Ceci signifie que la mesure est précise à 2% près. On peut écrire aussi bien $(25,1 \pm 0,5)$ cm que $(25,1 \text{ cm} \pm 2\%)$.

Comment arrondir le résultat d'un calcul

L'incertitude absolue d'un résultat doit être arrondie à *un seul chiffre significatif*. Après quoi la mesure elle-même doit être arrondie en fonction de la position décimale de l'incertitude.

Exemples: $125,66 \pm 0,878$ deviendra $125,7 \pm 0,9$
tandis que $0,05295 \pm 0,002369$ deviendra $0,053 \pm 0,002$

Incertitude d'une somme ou d'une différence

L'incertitude absolue de d'une somme ou d'une différence est égale à la somme des incertitudes absolues.

$$z = x + y \quad \Rightarrow \quad \Delta z = \Delta x + \Delta y$$

Exemple: Supposons que vous mesuriez les deux longueurs suivantes et que vous désiriez savoir quelle longueur elles font bout à bout:

$$12,359 \pm 0,008 \text{ m}$$

$$1,77 \pm 0,01 \text{ m}$$

$$14,129 \pm 0,018 \text{ m} \longrightarrow 14,13 \pm 0,02 \text{ m}$$

Incertitude d'un produit ou d'un quotient

L'incertitude relative de d'un produit ou d'un quotient est égale à la somme des incertitudes relatives des mesures.

$$z = x y \Rightarrow \frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Exemple: Supposons que les deux derniers segments de l'exemple précédents soient les côtés d'un jardin dont on veut connaître l'aire.

$$\begin{aligned} A &= (4,356 \pm 0,003 \text{ m}) * (1,77 \pm 0,01 \text{ m}) \\ A &= (4,356 \text{ m} \pm 0,069\%) * (1,77 \text{ m} \pm 0,56\%) \\ A &= (7,710 12 \text{ m}^2 \pm 0,63\%) \\ A &= (7,710 12 \pm 0,0489) \text{ m}^2 \\ A &= (7,71 \pm 0,05) \text{ m}^2 \end{aligned}$$

On remarque que le résultat ne comporte pas plus de chiffres significatifs (3) que le plus imprécis des chiffres ($1,77 \pm 0,01 \text{ m}$ à en juger par le nombre de chiffres significatifs).

Incertitude d'une fonction d'une variable

Dans les cas où nous avons une quantité z qui est fonction d'une mesure x ; $z = F(x)$. L'incertitude absolue de z est obtenue à partir de la formule de la différentielle. Elle est égale à la dérivée de la fonction multipliée par l'incertitude absolue de la mesure.

$$z = F(x) \Rightarrow \Delta z = F'(x) \Delta x \text{ où } F'(x) \text{ est la dérivée par rapport à } x.$$

Exemple: Supposons que $z = \ln(x)$ et que x soit mesuré comme $89,3 \pm 0,4$. Que vaut Δz ? D'une part, on sait que

$$\begin{aligned} z &= \ln(89,3) \\ z &= 4,492 001 \dots \text{ mais où arrondir?} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } z' &= 1/x ; \text{ alors } \Delta z = (1/x) \Delta x \\ \Delta z &= (1/89,3) (0,4) \\ &= 0,00448 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } z &= 4,492 001 \pm 0,004 \\ z &= 4,492 \pm 0,004 \end{aligned}$$

Méthode des extrêmes

On peut se servir de la méthode des extrêmes pour évaluer les valeurs minimales et maximales que peut prendre une fonction, et ainsi trouver son incertitude par tâtonnement.

$$z_{\min} = F(x_{\min} \text{ ou } x_{\max}) \quad z = F(x) \quad \Delta z \approx (z_{\max} - z_{\min}) \div 2$$

Reprenons l'exemple précédent: $z_{\min} = \ln(88,9) = 4,48751$ et $z_{\max} = \ln(89,7) = 4,496471$

donc $\Delta z \approx (z_{\max} - z_{\min}) \div 2 \approx 0,004$ et le résultat correctement arrondi est:
 $z = 4,492 \pm 0,004$. On voit que cette méthode donne le même résultat que celle utilisant le calcul différentiel. Attention, il faut être certain d'utiliser les bons extremums. Ainsi, pour *maximiser* une fraction, il faut *minimiser* le dénominateur.

Exercices

Calculez la valeur centrale demandée, déterminez ses incertitudes absolue et relative, et exprimez correctement la valeur en arrondissant là où il faut.

$$x = 23,50 \pm 0,05$$

$$y = 6,88 \pm 0,01$$

$$z = 0,052 \pm 0,003$$

- | | |
|-------------------|------------------------------------|
| 1. $A = x + y$ | 6. $F = x^2z - 3y$ |
| 2. $B = yz$ | 7. $G = 4\pi x^3 / 3$ |
| 3. $C = y - xz$ | 8. $H = (x)^{-1/2}$ |
| 4. $D = xy/z$ | 9. $J = \tan(10 * z_{\text{rad}})$ |
| 5. $E = \ln(x/z)$ | 10. $K = 3\sqrt{x}$ |

Réponses:

$$A = 30,38 \pm 0,06$$

$$B = 0,36 \pm 0,02$$

$$C = 5,66 \pm 0,08$$

$$D = 3100 \pm 200 \quad \text{ou mieux: } (3,1 \pm 0,2) \times 10^3$$

$$E = 6,11 \pm 0,06$$

$$F = 8 \pm 2$$

$$G = 54\,400 \pm 300 \quad \text{ou } (5,44 \pm 0,03) \times 10^4$$

$$H = 0,206\,3 \pm 0,000\,2$$

$$J = 0,57 \pm 0,04$$

$$K = 14,54 \pm 0,02$$